OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a XII-a

Soluţii

1. Imaginea funcției f este $\{\hat{0},\hat{1},\hat{4},\hat{7}\}$, așadar $A\subset\{\hat{0},\hat{1},\hat{4},\hat{7}\}$.

Observăm că $\hat{4}\in A <=> \hat{7}\in A$

Atunci soluțiile problemei sunt $\{\hat{0}\},\{\hat{1}\},\{\hat{0},\hat{1}\},\{\hat{4},\hat{7}\},\{\hat{0},\hat{4},\hat{7}\},\{\hat{1},\hat{4},\hat{7}\},\{\hat{0},\hat{1},\hat{4},\hat{7}\}$

2. a) $(x*y)*z=2015^2xyz-2015\cdot 2014(xy+xz+yz)+2014^2(x+y+z)-2014\cdot 2013$

$x*(y*z)=2015^2xyz-2015\cdot 2014(xy+xz+yz)+2014^2(x+y+z)-2014\cdot 2013$

b) $x*x\geq\alpha\ \ \forall x\in R <=> 2015x^2-2\cdot 2014x+2014-\alpha\geq 0\ \forall x\in R <=> \Delta\leq 0 <=>$

$4\cdot 2014^2-4\cdot 2015(2014-\alpha)\leq 0 <=> \alpha\leq\frac{2014}{2015}$

c) Se observă că $A*\frac{2014}{2015}=\frac{2014}{2015}=\frac{2014}{2015}*B$

Atunci $\frac{1}{2015}*\frac{2}{2015}*...*\frac{2015}{2015}=A*\frac{2014}{2015}*1=\frac{2014}{2015}$

3. Fie F o primitivă neinjectivă a lui f. Atunci există $x_1,x_2\in R$, $x_1<x_2$ cu $F(x_1)=F(x_2)$

Consider $x_3=\frac{2x_1+x_2}{3}\in(x_1,x_2)$ și aplic teorema lui Lagrange funcției F pe $[x_1,x_3]$ și $[x_3,x_2]$

$$\frac{F(x_3)-F(x_1)}{x_3-x_1}=F'(a)=f(a) <=> 3\frac{F(x_3)-F(x_1)}{x_2-x_1}=f(a) <=> \frac{F(x_3)-F(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(a)}{3}$$

$$\frac{F(x_2)-F(x_3)}{x_2-x_3}=F'(b)=f(b) <=> \frac{3}{2}\frac{F(x_2)-F(x_3)}{x_2-x_1}=f(b) <=> \frac{F(x_2)-F(x_3)}{x_2-x_1}=\frac{2f(b)}{3}$$

Însumând cele 2 relații se obține $f(a)+2f(b)=0$.

4. Fie $A=\int \frac{\sin x}{e^x+\sin x+\cos x}dx$ și $B=\int \frac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x+\cos x}dx$

$$A+B=\int \frac{e^x+\sin x+\cos x}{e^x+\sin x+\cos x}dx=x+C$$

$$B-A=\int \frac{e^x+\cos x-\sin x}{e^x+\sin x+\cos x}dx=\int \frac{(e^x+\sin x+\cos x)'}{e^x+\sin x+\cos x}dx=\ln(e^x+\sin x+\cos x)+C$$

Atunci $A=\frac{x-\ln(e^x+\sin x+\cos x)}{2}+C$